Übungsblatt 5

Aufgabe 1 *(20 Punkte)* Sei G eine Gruppe.

- **(a)** Zeigen Sie, dass die Relation

$$g \sim h \;:\Leftrightarrow\; \text{es gibt ein } a \in G \text{ mit } g = C_a(h) = a \cdot h \cdot a^{-1}$$

eine Äquivalenzrelation ist. (Die Äquivalenzklassen nennt man *Konjugationsklassen*.)

- **(b)** Geben Sie die Konjugationsklasse des neutralen Elements e der Gruppe an, und bestimmen Sie alle Konjugationsklassen einer Abelschen Gruppe.
- **(c)** Berechnen Sie die (drei) Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe S_3.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)* Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Das *Zentrum* von G ist definiert als

$$Z(G) := \{g \in G \,|\, g \cdot h = h \cdot g \text{ für alle } h \in G\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $Z(G) \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe von G ist.

Aufgabe 3 *(40 Punkte)* Betrachten Sie die Diedergruppe D_n, die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks. Die Elemente von D_n sind die Drehungen r_j, $j \in \mathbb{Z}_n$, um die Winkel φ_j mit $\frac{n}{2\pi}\varphi_j \in j$, und die Spiegelungen s_j, $j \in \mathbb{Z}_n$ an den Symmetrieachsen. Das neutrale Element ist $e = r_{[0]}$. Die Verknüpfung auf D_n ist gegeben durch

$$\begin{array}{ll} r_i \cdot r_j = r_{i+j} & r_i \cdot s_j = s_{j-i} \\ s_i \cdot s_j = r_{j-i} & s_i \cdot r_j = s_{i+j} \end{array}$$

- **(a)** Zeigen Sie, dass $H = \{r_{[0]}, s_{[0]}\} \subset D_n$ eine Untergruppe ist.
- **(b)** Berechnen Sie die entsprechenden Linksnebenklassen und bestimmen Sie D_n/H.
- **(c)** Bestimmen Sie die konjugierten Untergruppen $g \cdot H \cdot g^{-1}$ für $g \in D_n$. Ist H eine normale Untergruppe?
- **(d)** Zeigen Sie, dass die Abbildung $\sigma : D_n \to \{\pm 1\}$ mit $\sigma(r_j) = 1$ und $\sigma(s_j) = -1$ für alle $j \in \mathbb{Z}_n$ ein Gruppenhomomorphismus ist.
- **(e)** Folgern Sie, dass $N = \{r_i \,|\, i \in \mathbb{Z}_n\} \triangleleft D_n$ eine normale Untergruppe ist.
- **(f)** Bestimmen Sie die entsprechenden Nebenklassen, und die Quotientengruppe D_n/N (mit Gruppenverknüpfung).
- **(g)** Berechnen Sie die Konjugationsklassen von D_n (vgl. Aufgabe 1).

Aufgabe 4 *(30 Punkte)* Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, mit einer Untergruppen $H \subseteq G$ und einer normalen Untergruppe $N \trianglelefteq G$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $H \cdot N = \{h \cdot n \,|\, h \in H\,,\ n \in N\} \subseteq G$ ist eine Untergruppe von G.
(b) $N \trianglelefteq H \cdot N$ ist eine normale Untergruppe von $H \cdot N$.
(c) Der Durchschnitt $H \cap N \subseteq G$ ist eine Untergruppe von G.
(d) $H \cap N \trianglelefteq H$ ist eine normale Untergruppe von H.
(e) Die Quotientengruppen $H \cdot N/N$ und $H/(H \cap N)$ sind isomorph. (Tipp: Komponieren Sie die Abbildung $H \to H \cdot N$, $h \mapsto h = h \cdot e$ mit der Quotientenabbildung $H \cdot N \to H \cdot N/N$, und wenden Sie Satz 11.15 an.)

Abgabe 24.03.2017[*]

[*]Lösungen bitte bis 12:00 Uhr in entspr. Kasten im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.