Übungsblatt 4

Aufgabe 1 *(80 Punkte)* Ziel dieser Aufgabe ist es die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} [2] & [2] & [0] & [0] & [0] \\ [1] & [1] & [0] & [2] & [0] \\ [2] & [0] & [2] & [1] & [0] \\ [2] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [1] & [2] & [2] & [0] & [2] \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5,5;\mathbb{F}_3)$$

in Jordansche Normalform zu bringen.

- **(a)** Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A von A und argumentieren Sie, dass es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{F}_3)$ gibt, für die $T^{-1} \cdot A \cdot T$ Jordansche Normalform hat. (Zur Überprüfung: $\chi_A(t) = (t-[2])^5$.)
- **(b)** Argumentieren Sie, dass der Hauptraum $\widehat{V}_2(A)$ von A zum Eigenwert $[2]$ der gesamte Raum $\mathrm{Mat}(5,1;\mathbb{F}_3)$ ist, und dass die Matrix $B = A - [2]\,\mathbb{I}_5$ nilpotent ist.
- **(c)** Berechnen Sie $\dim(\ker(B^i))$, $i = 1, 2, \ldots$, und schließen Sie damit auf die Größe der auftretenden Jordanblöcke. (Zur Überprüfung: es gibt einen Jordanblock der Größe 3 und einen der Größe 2.)
- **(d)** Bestimmen Sie eine Jordanbasis $\mathcal{A}_1 = (v_1, v_2, v_3)$ für den Jordanblock der Größe 3.
- **(e)** Finden Sie einen $(A\cdot)$-invarianten Komplementärraum zu $\mathcal{L}(\{v_1, v_2, v_3\})$ und eine Jordanbasis $\mathcal{A}_2 = (v_4, v_5)$ für den Jordanblock der Größe 2.
- **(f)** Geben Sie die entsprechende Matrix $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{F}_3)$ an, sodass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ Jordansche Normalform hat.
- **(g)** Berechnen Sie T^{-1} und $T^{-1} \cdot A \cdot T$.

Aufgabe 2 *(20 Punkte)* Sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;K)$ eine nilpotente Matrix. Zeigen Sie, dass $A + A^2$ die gleiche Jordansche Normalform hat wie A. (Gehen Sie wie folgt vor: zeigen Sie dies für alle Jordan-Matrizen $A = J_n$, und argumentieren Sie dann, dass daraus die Aussage für beliebige nilpotente Matrizen A folgt.)

Abgabe 17.03.2017*

*Lösungen bitte bis 12:00 Uhr in entspr. Kasten im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.