Übungsblatt 3

Aufgabe 1 *(20 Punkte)* Zeigen Sie, dass eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{C})$ genau dann normal ist, wenn Sie die Form hat

$$M = \begin{pmatrix} z + r\,\zeta & w\,\zeta \\ \bar{w}\,\zeta & z - r\,\zeta \end{pmatrix}$$

mit $z, w, \zeta \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, wobei $|\zeta|^2 = 1$. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

Aufgabe 2 *(20 Punkte)* Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitescher Form $\eta : V \times V \to \mathbb{C}$, und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ ein Endomorphismus von V. Beweisen Sie, dass aus $\eta(v, f(v)) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$ folgt, dass f selbstadjungiert ist. (Tipp: Hier ist es wichtig, dass V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist!)

Aufgabe 3 *(20 Punkte)* Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n;K)$. Zeigen Sie

(a) Ist $A \cdot B$ nilpotent, so gilt dies auch für $B \cdot A$.
(b) Sind sowohl A also auch B nilpotent und gilt außerdem $A \cdot B = B \cdot A$, so ist auch $A + B$ nilpotent.
(c) Für $n = 2$ gibt es nilpotente Matrizen A und B, sodass $A + B$ nicht nilpotent ist.
(d) Falls A nilpotent und diagonalisierbar ist, so ist $A = 0$.

Aufgabe 4 *(40 Punkte)* Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 & 0 \\ 4 & 9 & 11 & -2 \\ -2 & -5 & -5 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,4;\mathbb{R})\,.$$

Zeigen Sie, dass A nilpotent ist, und finden Sie eine Basis von $\mathrm{Mat}(4,1;\mathbb{R})$, in der die lineare Abbildung $A\cdot$ die Blockdiagonalgestalt aus Satz 10.6. hat. (Tipp: Verwenden Sie die Strategie aus dem Beweis von Satz 10.6.)

Abgabe 10.03.2017*

*Lösungen bitte bis 12:00 Uhr in entspr. Kasten im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.