Übungsblatt 2

Aufgabe 1 *(25 Punkte)* Betrachten Sie die positiv definite hermitesche Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -2-i \\ 1-i & 3 & -2 \\ -2+i & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbb{C}) .$$

(a) Finden Sie eine Basis von $Mat(3,1;\mathbb{C})$, die orthonormal ist bzgl. der hermiteschen Form

$$\eta(x,y) = x^* \cdot H \cdot y \quad \text{für } x,y \in \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{C}) .$$

(b) Verwenden Sie (a), um die Inverse H^{-1} der Matrix H zu bestimmen.

Aufgabe 2 *(15 Punkte)* Betrachten Sie die folgenden symmetrischen Bilinearformen auf $\mathrm{Mat}(2,1;\mathbb{R})$

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1\,y_1 - x_2\,y_2 \quad \text{und} \quad \widetilde{\beta}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1\,y_2 + x_2\,y_1 .$$

Zeigen Sie, dass es keine Basis von $\mathrm{Mat}(2,1;\mathbb{R})$ gibt, die sowohl orthogonal bzgl. β als auch bzgl. $\widetilde{\beta}$ ist.

Aufgabe 3 *(30 Punkte)* Sei (V,η) ein unitärer Vektorraum, und seien $f,g \in \mathrm{Hom}(V,V)$.

(a) Zeigen Sie $(f^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}} = f$, und folgern Sie $(F^*)^* = F$ für alle $F \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$.

(b) Zeigen Sie $(f \circ g)^{\mathrm{ad}} = g^{\mathrm{ad}} \circ f^{\mathrm{ad}}$, und folgern Sie $(F \cdot G)^* = G^* \cdot F^*$ für alle $F,G \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$.

(c) Nehmen Sie an, dass f und g selbstadjungiert sind, und folgern Sie, dass dies auch für $f \circ g$ gilt genau dann wenn $f \circ g = g \circ f$.

(d) Sei f selbstadjungiert und außerdem nilpotent (d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0$). Beweisen Sie, dass dann $f = 0$ gelten muss.

(e) Sei $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$, sodass $\eta(v,f(v)) = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass dann $f = 0$ gelten muss. (Tipp: hier muss man verwenden, dass V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Eine analoge Aussage für Euklidische Vektorräume gilt **nicht**!)

Aufgabe 4 *(30 Punkte)*

(a) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;K)$ eine quadratische Matrix über einem beliebigen Körper K. Die Summe ihrer Diagonaleinträge

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

nennt man auch die Spur von A. Zeigen Sie, dass die Spur zyklisch ist, d.h. dass für alle $A,B \in \mathrm{Mat}(n,n;K)$ gilt

$$\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A) .$$

(b) Betrachten Sie nun den Vektorraum $V = \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$ der komplexen $n \times n$-Matrizen zusammen mit der positiv definiten hermiteschen Form $\eta : V \times V \to \mathbb{C}$

$$\eta(A,B) = \mathrm{tr}(A^* \cdot B) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{ij}}\, b_{ij}\,.$$

Für eine gewählte Matrix $M \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$ definiere die linearen Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} l_M : V & \to & V \\ A & \mapsto & M \cdot A \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} r_M : V & \to & V \\ A & \mapsto & A \cdot M^* \end{array}\,.$$

Zeigen Sie, dass l_{M^*} zu l_M und r_{M^*} zu r_M adjungiert sind.

(c) Folgern Sie, dass l_M und r_M genau dann selbstadjungiert und normal sind, wenn dies für M gilt.

(d) Seien nun $M, N \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$ normal mit Eigenvektoren $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ von M bzw. $w^{(1)}, \ldots, w^{(n)}$ von N zu den Eigenwerten $\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(n)}$ bzw. $\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(n)}$, d.h.

$$M \cdot v^{(i)} = \mu^{(i)}\, v^{(i)}\,, \quad N \cdot w^{(i)} = \nu^{(i)}\, w^{(i)}\,.$$

Zeigen Sie, dass dann die Matrizen $X^{(i,j)}$, $1 \leq i,j \leq n$ mit den Einträgen

$$\left(X^{(i,j)}\right)_{ab} = v_a^{(i)}\, \bar{w}_b^{(j)}$$

gemeinsame Eigenvektoren von l_M und r_N sind. ($v_a^{(i)}$ und $w_a^{(i)}$ sind die Einträge in der a-ten Zeile der Spaltenvektoren $v^{(i)}$. bzw. $w^{(i)}$.) Was sind die entsprechenden Eigenwerte von l_M und r_N?

Abgabe 03.03.2017[*]

[*] Lösungen bitte bis 12:00 Uhr in entspr. Kasten im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.