Übungsblatt 1

Aufgabe 1 *(50 Punkte)* Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit geordneter Basis $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Betrachte die Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ auf V, die definiert ist durch

$$\begin{aligned}&\beta(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3)\\ &\quad = (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) + (\lambda_2 + \lambda_3)(\mu_2 + \mu_3) + (\lambda_3 + \lambda_1)(\mu_3 + \mu_1)\end{aligned}$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung $B := \mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(\beta)$ von β an.
(b) Zeigen Sie (mit Hilfe der Matrixdarstellung), dass β symmetrisch und positiv definit ist. (Tipp: Hauptminorenkriterium.)
(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ von V.
(d) Finden Sie die zugehörige obere Dreiecksmatrix P, für die gilt $P^{\mathrm{t}} \cdot B \cdot P = \mathbb{I}_3$.
(e) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ des Unterraums

$$U := \mathcal{L}(\{v_2, v_3\}) \subset V.$$

(f) Bestimmen Sie den orthogonalen Projektor $\pi_{U^\perp}$. Geben Sie die Matrixdarstellung bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ an, und überprüfen Sie damit explizit, dass $\pi_{U^\perp} \circ \pi_{U^\perp} = \pi_{U^\perp}$ gilt.
(g) Verwenden Sie $\pi_U + \pi_{U^\perp} = \mathrm{id}_V$, um die Matrixdarstellung bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ von π_U zu berechnen. Verwenden Sie diese, um zu zeigen $\pi_U \circ \pi_U = \pi_U$ und $\pi_U \circ \pi_{U^\perp} = 0$.

Aufgabe 2 *(20 Punkte)* Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Matrix $M := A^{\mathrm{t}} \cdot A$ positiv definit und symmetrisch ist.

Aufgabe 3 *(30 Punkte)* Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V. Sei G eine endliche Untergruppe der Gruppe der Automorphismen von V. Definiere

$$\beta' : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \beta'(v, w) = \sum_{g \in G} \beta(g(v), g(w)) \text{ für } v, w \in V.$$

(a) Zeigen Sie, dass β' eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V ist.
(b) Zeigen Sie, dass β' G-invariant ist, d.h. für alle $h \in G$ und alle $v, w \in V$ gilt

$$\beta'(h(v), h(w)) = \beta'(v, w).$$

Abgabe 24.02.2017*

*Lösungen bitte bis 12:00 Uhr in entspr. Kasten im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.