Übungsblatt 0

– zur Diskussion in den Tutorien –

Aufgabe 1 Betrachten Sie den $\mathbb{F}_3$-Vektorraum V mit geordneter Basis $\mathcal{A} = (w_1, w_2, w_3)$, und der symmetrischen Bilinearform β, die durch die Matrixdarstellung

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(\beta) = \begin{pmatrix} [0] & [1] & [2] \\ [1] & [1] & [1] \\ [2] & [1] & [0] \end{pmatrix}$$

definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Charakteristik $char(\mathbb{F}_3) \neq 2$ ist.
(b) Finden Sie eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von V.
(c) Bestimmen Sie die Basiswechsel-Matrix $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\,\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ und berechnen Sie die Matrixdarstellung $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\beta) = T^{\mathrm{t}} \cdot B \cdot T$.

Aufgabe 2 Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ der Polynome from Grad kleiner gleich 3.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung der symmetrischen Bilinearform

$$\beta(f, g) := \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, f(t)\, g(t) \quad \text{für } f, g \in V$$

bzgl. der Basis $\mathcal{A} = (1, t, t^2, t^3)$ von V an.
(b) Verwenden Sie die Matrixdarstellung, um zu zeigen, dass β positiv definit ist.
(c) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^{\perp}$ des Untervektorraums $U := \mathbb{R}\, t$.