Lineare Algebra IIa

- 06. Vorlesung -

Prof. Dr. Daniel Roggenkamp
&
Sven Balnojan

Satz 10.6. Sei $f : V \to V$ nilpotenter Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und $d := \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$, dann gibt es eindeutige $k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}_0$ mit

$$k_1 + 2\,k_2 + 3\,k_3 + \ldots + d\,k_d = \dim(V)\,,$$

und eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_d & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & J_d & & & & & 0 & & \\ & & & J_{d-1} & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & J_{d-1} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & & & J_1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & J_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} J \\ J \\ J \end{matrix}}\right\} k_d\text{-mal} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} J \\ J \\ J \end{matrix}}\right\} k_{d-1}\text{-mal} \\ \quad\vdots \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} J \\ J \\ J \end{matrix}}\right\} k_1\text{-mal} \end{array} \tag{10.1}$$

Dies ist insbesondere eine obere Dreiecksmatrix.

10.2. Hauptraumzerlegung

Verallgemeinerung des Eigenraum-Begriffs!

Definition 10.8. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$ ein Endomorphismus. Definiere den **verallgemeinerten Eigenraum**, bzw. **Hauptraum** von f zu $\lambda \in K$:

$$\widehat{V}_\lambda(f) := \{v \in V \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : \ (f - \lambda \mathrm{id}_V)^n(v) = 0\} .$$

Die von 0 verschiedenen Elemente von $\widehat{V}_\lambda(f)$ nennen wir **verallgemeinerte Eigenvektoren** bzw. **Hauptvektoren** von f zum Eigenwert λ.

Bemerkung 10.9. Offenbar sind die Haupträume $\widehat{V}_\lambda(f) \subseteq V$ Untervektorräume, und sie enthalten die entsprechenden Eigenräume: $V_\lambda(f) \subseteq \widehat{V}_\lambda(f)$. In der Tat gilt sogar

$$V_\lambda(f) \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{V}_\lambda(f) \neq \{0\} ,$$

d.h. λ ist Eigenwert von f genau dann, wenn der entsprechende Hauptraum $\widehat{V}_\lambda(f)$ nicht der Nullraum ist.