Große Übung 7

0.1 Blatt 5, Aufgabe 4

Aufgabe 1. Gruppen und Untergruppen

Sei $(G, \cdot)$ eine Guppe mit einer Untergruppe $H \subseteq G$ und einer normalen Untergruppe $N \trianglelefteq G$. Beweise Aussagen (a)-(e). ...

0.2 Wiederholung + Beispiele

0.2.1 Beispiel

Ein wichtiges (nicht LA) Beispiel für Quotientenräume sind L^p-Räume.

Aufgabe 2. Quotientenraum

Betrachte den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und den Untervektorraum $V = \mathscr{L}((2,1)^t)$.

(i) Bestimme die affinen Unterräume von V mit Translationsraum U und skizziere diese.
(ii) Sei $W : V = U \oplus W$; Schreibe den Isomorphismus $\pi_W : W \to^{\cong} V/U$ hin.

Große Übung 7

0.1 Blatt 5, Aufgabe 4

Aufgabe 1. Gruppen und Untergruppen

Sei $(G, \cdot)$ eine Guppe mit einer Untergruppe $H \subseteq G$ und einer normalen Untergruppe $N \trianglelefteq G$. Beweise Aussagen (a)-(e).

Lösung: **(a)** ZZ: $H \cdot N \subseteq G$ ist eine Untergruppe von $G \Leftrightarrow \forall (h_1 n_1), (h_2 n_2) \in HN$ sind auch $(h_1 n_1) \cdot (h_2 n_2)$ und $(h_1 n_1)^{-1}$ in $HN \Leftrightarrow (h_1 n_1)^{-1} \cdot (h_2 n_2) \in HN$. Alles reinstecken und nachrechnen.

(b) $ZZ : N \trianglelefteq HN \Leftrightarrow (hn) \cdot n^{'} \cdot (hn)^{-1} = n^{'}$. Nutze dass N normal ist.

(c) $ZZ : H \cap N \subseteq G$ ist eine Untergruppe $\Leftrightarrow a, b \in H \cap N$ gilt $a^{-1} b \in H \cap N$. Folgt fast direkt.

(d) $ZZ : H \cap N \trianglelefteq H$ ist Normalteiler $\Leftrightarrow hgh^{-1} \in H \cap N, \forall g \in H \cap N$ und $h \in H$ (nicht aber für $h \in G$!). Nutze das g auch in N liegt.

(e) Erinnerung Satz 11.15: $\varphi : H \to G$ induziert Isomorphismus $\varphi : H/ker(\varphi) \to^{\cong} \varphi(H)$.

$\rho : H \to H \cdot N, h \mapsto h = h \cdot e$ ist ein G. hom. $\pi : H \cdot N \to HN/N$ ebenfalls (die Q. abbildung, nach Satz 11.13). $\varphi = \pi \circ \rho$ ist also auch ein G. hom.

Zeige φ ist surjektiv;

Bestimme $ker(\varphi)$;

Folgere das Resultat.

0.2 Wiederholung + Beispiele

K-Vektorraum V und ein Untervektorraum $U \subseteq V$. V/U ist wieder ein K-Vektorraum. Der Quotientenraum oder Faktorraum.

Nebenklassen: $[v] = v + U$ (affine Unterräume von V, mit Translationsraum U. Siehe Beispiel.)

Im Wesentlichen zwei wichtige Eigenschaften:

1. Sei $V = U \oplus W$, dann ist $\pi\mid_W : W \to V/U$ ein Isomorphismus.
2. $f \in End(V), f(U) \subseteq U \implies \exists \tilde{f} \in End(V/U)$ mit $\pi \circ f = \tilde{f} \circ \pi$ und $det(f) = det(f\mid_U) det(\tilde{f})$.

0.2.1 Beispiel

Ein wichtiges (nicht LA) Beispiel für Quotientenräume sind L^p-Räume; $L^2 := \mathcal{L}^2/\mathcal{N}$, mit $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2 \mid\mid f \mid\mid = 0\}$.

Aufgabe 2. Quotientenraum

Betrachte den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und den Untervektorraum $V = \mathscr{L}((2,1)^t)$.

(i) Bestimme die affinen Unterräume von V mit Translationsraum U und skizziere diese.

(ii) Sei $W : V = U \oplus W$; Schreibe den Isomorphismus $\pi_W : W \to^{\cong} V/U$ hin.

Lösung: (i) Sei e_1, e_2 eine Basis von $\mathbb{R}$, mit $e_1 = (2,1)^t$ und $e_2 = (-1,2)^t$; Schreibe $v = (v_1, v_2)^t \in V$.

$$[v] = v + U = v_1 e_1 + v_2 e_2 + U...$$

.

Wir können $e_1 = (2,1)^t$ wählen. Dann ist $v_1 e_1 \in U$ und $[v] = v_2 e_2 + U$.