Große Übung 6

0.1 Blatt 4, Aufgabe 2

Aufgabe 1. Nilpotenz und Jordannormalform

Sei $A \in Mat(n,n;K)$ nilpotent; Zeige dass $A + A^2$ die gleiche Jordannormalform hat.

0.2 Verweis auf Handout Mathe Software Tools

Guckt euch auf http://mathphys.math.uni-mannheim.de/LA2a/la2a.html das "Handout zu Software Tools" an.

0.3 Wiederholung + Beispiele

0.3.1 Gruppen

Aufgabe 2. eine endliche Gruppe

Betrachte die Gruppe S_5 und ihre Untergruppe A_5 der geraden Permutationen (Zerlege eine Permutation in Transpositionen und zähle diese $\Longrightarrow$ gerade Anzahl an Transpositionen heißt *gerade Permutation*).

(i) Wie viele Elemente hat A_5?
(ii) Ist A_5 ein Normalteiler?
(iii) Was sind die Linksnebenklassen von A_5 in S_5?
(iv) Wie sieht die Quotientengruppe G/H mit $G = S_5$ und $H = A_5$ aus?

Lösungen zur großen Übung 6

0.1 Blatt 4, Aufgabe 2

Aufgabe 1. Nilpotenz und Jordannormalform

Sei $A \in Mat(n,n;K)$ nilpotent; Zeige dass $A + A^2$ die gleiche Jordannormalform hat.

Beweis: Es reicht das Resultat blockweise zu zeigen; Sei J_n eine Jordanmatrix.
Zu zeigen: $J_n + J_n^2$ hat die JNF J_n. Definiere $B := J_n + J_n^2$.
B ist nilpotent, weil B eine strikte obere Dreiecksmatrix ist; $B^n = 0$.
$rang(B) = n - 1 \implies dim(ker(B)) = 1$.
$\implies B$ hat JNF J_n (genau einen Jordanblock zum einen Eigenwert 0).

0.2 Verweis auf Handout Mathe Software

Guckt euch auf http://mathphys.math.uni-mannheim.de/LA2a/la2a.html das "Handout zu Software Tools" an.

0.3 Wiederholung + Beispiele

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge (mit Struktur) M. Wir interessieren uns für:

$$\pi_\sim : M \to M/\sim$$

$$m \mapsto [m]$$

0.3.1 Relationen

Eine Relation R auf einer Menge M, $R \subset M \times M$, setzt Elemente in Verbindung. Wir schreiben

$$n \sim m \Leftrightarrow (m,n) \in R$$

Visualisiere als Bilder: $x < y$ auf $M = \mathbb{R}$, und $(x - y)$ gerade auf $\mathbb{Z}$.
Andere Art von Relation: $M = \{$A,B,C$\}$, darauf etwas vollständiges, transitives (eine Präferenzordnung).
Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch, transitiv.
Äquivalenzklassen: Beispiel $\mathbb{Z}_5$. $n \sim m \iff 5 \mid (n - m)$. Die Äquivalenzklassen sind dann bestimmt durch den Rest.

Nimm $M = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Ring, hier ist dann $M/\sim = \mathbb{Z}_5$ **wieder ein Ring** (der "Restklassenring"). Anderes Beispiel, Sei $M = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\{0\})$ eine einfache Menge ohne Extrastruktur, dann können wir durch eine passende Relation $\sim$, die Menge $M/\sim$ zum **Körper** der rationalen Zahlen machen.

0.3.2 Gruppen

(Zum *Aufgabenblatt 5*) Motivation zur **Konjugation**: Für Matrizen kennen wir die Idee, dass zwei Abbildungen ($A, B \in Gl(n,n;K)$) "gleich" sind, wenn es einen Basiswechsel gibt. Der wird

$$TAT^{-1} = B$$

geschrieben, oder $\exists T \in G$ (G Gruppe) sodass $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$ gilt. Sei G eine Gruppe. Dann nennen wir $g \sim h$ **konjugiert**, falls es ein $a \in G$ gibt, sodass $a \cdot h \cdot a^{-1} = g$ ist. Wir können h in g überführen (durch a). Dies ist eine Äquivalenzrelation (Übung). Wenn wir zusätzlich eine Untergruppe $H \subseteq G$ fixieren können wir weitere Äquivalenzrelationen $g \sim_L h$ und $g \sim_R h$ definieren (Idee hier z.B. wir wollen sagen, dass zwei Gruppenelmente gleich sind wenn z.B. die eine die Spiegelung des anderen ist); Die resultierenden Äquivalenzklassen nennen wir

- Linksnebenklassen $[g]_L = g \cdot H$ (bzgl. H)
- Rechtsnebenklassen $[g]_R = H \cdot g$ (bzgl. H)
- Konjugationsklassen (nicht bzgl. einer Untergruppe)

Aufgabe 2. eine endliche Gruppe

Betrachte die Gruppe S_5 und ihre Untergruppe A_5 geraden Permutationen (Zerlege eine Permutation in Transpositionen und zähle diese => gerade = gerade Anzahl an Transpositionen).
(i) Wie viele Elemente hat A_5?
(ii) Ist A_5 ein Normalteiler?
(iii) Was ist die Zerlegung in Linksnebenklassen von S_5 bzgl. A_5?
(iv) Wie sieht die Quotientengruppe G/H mit $G = S_5$ und $H = A_5$ aus?

Lösung: (i) S_5 hat $5! = 120$ Elemente. Wie viele Elemente hat A_5? (A_5 ist offensichtlich endlich) Wir können S_5 in gerade und ungerade Permutationen zerlegen. Konstruiere dann eine Bijektion zwischen diesen Mengen und folgere die Anzahl der Elemente = 60.

(ii) Ist A_5 ein Normalteiler? (Ja) Es muss gelten $g \cdot H \cdot g^{-1} = H$. Das gilt in S_5 offensichtlich für $S_5, \{id\}$ (triviale Normalteiler) und für A_5, weil g und g^{-1} die gleiche Anzahl an Transpositionen haben; Also ist $A_5 \triangleleft S_5$. (In der Tat hat $S_{n>4}$ keine weiteren Normalteiler außer den beiden trivialen und A_n)

(iii) Sei $g \in S_5$ gerade; Dann gilt $h^{-1}g \in A_5$ genau dann, wenn h gerade ist; Also ist $[g]_L = A_5$. Andersherum, sei g ungerade, dann ist $[g]_L = \{\text{ungerade Permutationen}\}$. Es ist also die Zerlegung in Linksnebenklassen von S_5/A_5 gegeben durch:

$$S_5 = [\text{gerade Permutationen}]_L \sqcup [\text{ungerade Permutationen}]_L$$

(Es ist aber $[\text{ungerade Permutationen}]_L$ nicht einmal eine Untergruppe, das Produkt von zwei ungeraden Elementen ist gerade. Die Rechtsnebenklassen funktionieren genauso, weil $(\{\pm 1\}, \cdot)$ abelsch ist; Also Rechtsnebenklassen = Linksnebenklassen $\implies$ A_5 ist eine normale Untergruppe auch nach **Proposition 11.10**.)

(iv) Wie sieht die Quotientengruppe G/H aus? Nach **Satz 11.15** haben wir einen Isomorphismus $G/ker(\varphi) \to \varphi(G) = (\{\pm 1\}, \cdot)$, mit $\varphi = \text{signum}$. Ein Isomorphismus in eine solch einfache Gruppe (einfach weil sie nur zwei Elemente hat und abelsch ist; nicht im gruppentheoretischen Sinn) reicht aus, um die andere Gruppe "zu beschreiben".