Große Übung 5

0.1 Blatt 3, Aufgabe 4

Zeige Nilpotenz und finde eine Jordanbasis für die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 & 0 \\ 4 & 9 & 11 & -2 \\ -2 & -5 & -5 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,4;\mathbb{R})$$

Lösung:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, A^3 = 0$$

(i) Wir haben rank$(A) = 2$ (1te + 3te Zeile = -2te Zeile; 5*1te Zeile + 2te Zeile = 4te Zeile => Rang ist 2), also $\dim(ker(A)) = 2$
(ii) rank$(A^2) = 1$, also $\dim(ker(A^2)) = 3$.
(iii) rank$(A^3) = 0$ also $\dim(ker(A^3)) = 4$.

Jordanblockgröße (p.123 Skript): $k_i = 2dim(ker(A^i)) - dim(ker(A^{i-1}) - dim(ker(A^{i+1}))$, gibt $k_1 = 1$; $k_2 = 0$; $k_3 = 1$;

Für die Jordanbasis wählen wir nach Alg. aus letzter gr. Übung/Beweis **Satz 10.6**:
Schritt 1: Finde $v \in U := ker(A^3)/ker(A^2)$, in Jordanbasis sind A^2v, Av, v; eine Basis für den 3×3 Block.

Bemerkung: Es gilt $\forall w \in ker(A^2)/ker(A) : Aw \in \mathscr{L}(A^2v, Av, v)$.

Schritt 2: Finde $u \in ker(A)$ das nicht in $\mathscr{L}(A^2v, Av, v)$ liegt. Basis ist dann (A^2v, Av, v, u) wobei u die Basis für den 1×1 Block ist.
Zum Kern von A^2:

$$(A^2)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

Wähle also $v = e_4 \Longrightarrow (A^2e_4, Ae_4, e_4)$ ist 3×3 Block Jordanbasis.

Dann wähle z.B. $u = (-5, 1, 1, 0) \in ker(A)$; Dann ist

$$T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -5 \\ 8 & -2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -5 \\ 8 & -2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

0.2 Beispiele

0.2.1 Wiederholung

Bisher nur nilpotente Endomorphismen, alle Eigenwerte 0 $\implies$ $f - \lambda Id$ ist idempotent, alle Eigenwerte irgendein λ. Beispiele: Jordanblock & Jordanmatrix (siehe Skript). Nun iterieren für über beliebige Eigenwerte (möglicherweise verschieden) und erhalten die Jordannormalform.

Tipp von Falko: Kochen mit Jordan. (www.danielwinkler.de/la/jnfkochrezept.pdf)

Rezept funktioniert jetzt Eigenwert für Eigenwert, Block für Block (bei nilpotenten Endomorphismen nur Block für Block, alle Eigenwerte sind ja gleich).

0.2.2 Aufgaben

Aufgabe 1. Jordannormalform über endlichem Körper

Bisher waren wir über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ unterwegs. Nun ein endlicher Körper. Über $\mathbb{F}_3$ wähle

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [1] & 0 \\ 0 & [1] & [2] \\ 0 & 0 & [1] \end{pmatrix}$$

Bestimme das charakteristische Polynom, die Jordanblockgröße, und die Basiswechselmatrix zur Jordannormalform.

Lösung:
- Erinnerung $\mathbb{F}_3$.

$$\chi_A(x) = (x - [1])^3$$

Der eine Eigenwert ist [1] mit $\mu_{[1]} = 3$. $\implies \hat{V}_{[1]} = 3$.

Setze $B = A - [1] \cdot Id_3$. Dann ist

$$B = \begin{pmatrix} 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & [2] \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & [2] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = 0.$$

Es ist $dim(ker(B)) = 1$,$dim(ker(B^2)) = 2$ und $dim(ker(B^3)) = 3$. (Elementare Zeilenumformungen zum Rank bestimmen. Hier könnt Ihr das einfach ablesen, da das ja eine obere Dreiecksmatrix ist.)

$$k_1 = 2dimker(B) - dim(ker(B^0) - dim(ker(B^2) = 2 - 0 - 2 = 0$$

$$k_2 = 2dim(ker(B^2)) - dim(ker(B)) - dim(ker(B^3)) = 4 - 1 - 3 = 0$$

$$k_3 = 2dim(ker(B^3)) - dim(ker(B^2)) - dim(ker(B^4)) = 6 - 2 - 3 = 1$$

Damit ist die Jordannormalform

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} [1] & [1] & 0 \\ 0 & [1] & [1] \\ 0 & 0 & [1] \end{pmatrix}$$

Bestimme T: Wir starten mit dem größten Block (es gibt nur einen). Finde ein $v \in ker(B^3)/ker(B^2)$.

$$ker(B^2) = \mathscr{L}(\begin{pmatrix} [1] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ [1] \\ 0 \end{pmatrix})$$

$e_3 \notin ker(B^2)$. Wir bilden also

$$(B^2 e_3, Be_3, e_3) = (\begin{pmatrix} [2] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ [2] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [1] \end{pmatrix}) =: T$$

Um T^{-1} zu bestimmen benutzen wir elementare Zeilen/Spaltenumformungen auf $(T \mid Id_3)$ und erhalten $T^{-1} = T$. (Warum? Weil T immer orthogonal/unitär sein muss. Hier ist T sogar diagonal und für diagonale Matrizen können wir das Inverse direkt bestimmen. Es ist eine Diagonalmatrix mit inversen Diagonaleinträgen. Nun ist [1] neutral bzgl. der Multiplikation und [2] zu sich selbst invers. Daher folgt $T^{-1} = T$)