Große Übung 4

0.1 Blatt 2, Aufgabe 4

Wir betrachten den Vektorraum $V = Mat(n, n; \mathbb{C})$ zusammen mit einer hermiteschen Form η, die wir über die *Spur* einer Matrix definieren. Auf (V, η) betrachten wir zwei Abbildungen l_M, die Linksmultiplikation mit einer fixierten Matrix M und r_M, die Rechtsmultiplikation mit M^* einer fixierten Matrix M.

Die fixierte Matrix M ist selbst eine Abbildung auf $Mat(1, n; \mathbb{C})$ und hat somit Eigenvektoren (in $Mat(1, n; \mathbb{C})$) und Eigenwerte;
Die Abbildungen l_M und r_M haben auch Eigenvektoren; Dies sind Matrizen in V.

Hinweise:
(a) Erst η dann tr ausschreiben.
(b) Ausschreiben und Rechenregeln für * nutzen, und (a) nicht vergessen.
(c) (b) nutzen.
(d) $l_M(X^{(i,j)}) = \lambda \cdot X^{(i,j)}$ ist zu zeigen für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Das geht am besten komponentenweise (Betrachte also $(l_M(X^{(i,j)}))_{r,s}$). Die Eigenwerte der Matrizen M, N werden auch Eigenwerte von den (jeweils passenden) Abbildungen sein.

0.2 Beispiele

0.2.1 Wiederholung

(Satz 7.25) f ist diagonalisierbar (hat also eine schöne Normalform) $\Leftrightarrow \chi_{Mat(f)}$ zerfällt in Linearfaktoren & $\mu_{x_i}(f) = dim(V_{x_i}(f))$. Was passiert wenn die zweite Bedingung nicht mehr gilt?

Beispiel: $A = J_3(\lambda)$ (aus dem Skript), hier gilt λ ist der einzige Eigenwert, $\mu_\lambda = 3$, aber $dim(V_\lambda) = 1$.

Wir können also die Eigenvektoren (wir haben in V_λ nur einen bis auf Vielfachheit) nicht zur Diagonalisierung nutzen (dazu brauchen wir $n = 3$ lin. unabhängige Eigenvektoren).

0.2.2 Aufgaben

Aufgabe 1. Jordanbasis

Betrachte die folgende Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeige das A nilpotent ist und bestimme eine Jordanbasis T, sodass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ in Jordanmatrizen zerfällt.

Lösung:
(Der Algorithmus steht im Beweis von Satz 10.6; Wir starten mit einer Auswahl an Jordanbasisvektoren aus $ker(A^k)/ker(A^{k-1})$, wobei k das kleinste k ist, sodass $A^k = 0$ gilt; Dann bilden wir die Vektoren $A^{k-1}v, A^{k-2}v, ..., v$; Sollte das nicht ausreichen, gehen wir zu $ker(A^{k-1})/ker(A^{k-2})$ über) Es ist $A^2 = 0$. Damit folgt $Rang(A) = 2$, $dim(ker(A)) = 2$, $dim(ker(A^2)) = 4$.

$$ker(A) = \langle \begin{pmatrix} -0,70 \\ -0,06 \\ -0,06 \\ -0,70 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,06 \\ -0,70 \\ 0,70 \\ -0,60 \end{pmatrix} \rangle$$

(gerundet). Der Rang von $ker(A^2)/ker(A)$ ist 2; Wähle also zwei linear unabhängige Vektoren darauß aus; Wir wählen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies Av_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir eine Jordanbasis als $T = (Av_1, v_1, Av_2, v_2)$ und es gilt

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Eigenvektoren

Betrachte die folgende Matrix M und bestimme ihre Eigenvektoren.

$$M = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$$

Lösung:

Das charakteristische Polynom ist $\chi_M(t) = t^2 - 2t - 2$; Die Eigenwerte sind damit $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Die Eigenräume bestimmen sich durch

$$ker(M - t_1 \cdot Id_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \cdot (-i + \sqrt{3}) \\ 1 \end{pmatrix} =: v_1 \text{ und } ker(M - t_2 \cdot Id_2) = \bar{v_1} =: v_2$$

Damit erhalten wir eine Basiswechselmatrix $T = (v_1\ v_2)$ und es gilt

$$T^{-1} \cdot M \cdot T = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$