Große Übung 3

0.1 Wiederholung

- Unitärer Vektorraum ist ein Tupel (V, β), V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$ Vektorraum und β eine hermitesche positiv definite Bilinearform.
- $f \in Hom(V, V)$ (= eine Matrix) ist eine bel. lineare Abbildung. f^{ad} ist die Abbildung $f^{ad} \in Hom(V, V)$, sodass $\beta(v, f^{ad}(w)) = \beta(f(v), w)$ gilt $\forall v, w \in V$.
- f ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow f^{ad} = f$.
- f heisst normal, wenn $f^{ad} \circ f = f \circ f^{ad}$. Für die Darstellungsmatrix heisst das $F^* \cdot F = F \cdot F^*$.
- Warum ist das so eine wichtige Eigenschaft?

$$\text{f/F diagonalisierbar} \iff \text{f/F normal}$$

- f heisst nilpotent, wenn gilt $f^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. (Beispiel unten)
- λ ist EW von A wenn gilt $Av = \lambda v$ für ein v, v ist dann der EV.

3. Wann ist ein f nilpotent? (Unten Beispiel)
   4. Normale Matrix + Eigenvektoren + Eigenwerte

0.2 Beispiele

0.2.1 Normale Endomorphismen, Eigenwerte, Nilpotenz

Aufgabe 1. Normale Endomorphismen

Sei $(\mathbb{C}^2, \beta)$ der unitäre Vektorraum mit $\beta =$ Std. skalarprodukt. Sei $b \in Hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ der Homomorphismus mit folgender Matrix bzgl. der Standardbasis:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{pmatrix}$$

Zeige das b und B normal sind (zur Übung zeige beides, natürlich reicht entweder b oder B). (Bespiel für Blatt 2, Aufgabe 3 mit $z = 3.5, ...$)

Antwort: Zunächst B. Mit Standardskalarprodukt, mit Darstellungsmatrix Id wird die Gleichung für die adjungierte Matrix zu $G = B^*$.

$$B^* = \bar{B}^t = \begin{pmatrix} 3 & \bar{1} - i \\ 1+i & 4 \end{pmatrix} = B.$$

$\implies B = B^*$; $\implies$ B selbstadjungiert; $\implies$ B normal $(B^*B = B^2 = BB^*)$.
Für b rechnen wir:

$$b(v) = \begin{pmatrix} 3v_1 + (1+i)v_2 \\ (1-i)v_1 + 4v_2 \end{pmatrix}$$

$$\beta(b(v), w) = \langle b(v), w \rangle = ((3v_1 + (\bar{1}+i)v_2) \cdot w_1 + ((1-i)\bar{v_1} + 4v_2) \cdot w_2$$

und

$$\beta(v, b(w)) = \bar{v_1} \cdot (3w_1 + (1+i)w_2) + \bar{v_2} \cdot ((1-i)w_1 + 4w_2)$$

das ist das Gleiche, also ist b selbstadjungiert.

Was sind die Eigenvektoren und Eigenwerte von B? Die Eigenwerte haben wir letztes Mal bestimmt, sie stehen auf der Diagonalmatrix und sind 2 und 5.
Antwort:
Ein Eigenvektor ist ein $v \in \mathbb{C}^2$:

$$Bv = \lambda v$$

$$Bv = b(v) = \begin{pmatrix} 3v_1 + (1+i)v_2 \\ (1-i)v_1 + 4v_2 \end{pmatrix} =^! \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Löse

$$3v_1 + (1+i)v_2 = \lambda v_1 \Leftrightarrow v_1 = (1+i)v_2/(\lambda - 3)$$

Nehme an, dass $v_2 = (1-i)$ ist, dann ist $v_1 = 2/(\lambda - 3)$, also $v_1 = 2/-1 = -2$.

$$v = \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} ... \\ .. \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Nilpotente Abbildung, Eigenvektoren

Betrachte $V = \mathbb{C}^3$ und die Abbildung $f \in Hom(V, V)$ die definiert ist durch

$$f \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v := A \cdot v, \forall v \in V.$$

Zeige das f nilpotent ist (was ist f^2?).
Antwort:

$$fv = \begin{pmatrix} 2v_2 + 3v_3 \\ 2v_3 \\ 0 \end{pmatrix}, f^2 v = f(fv) = \begin{pmatrix} 4v_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f^3 = f(f(f(v))) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall v \in V.$$

Anders ist auch klar, dass die Abbildungsmatrizen von f^2 und f^3 genau A^2 und A^3 sind. Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, "wandern die Antidiagonalen" beim potenzieren jeweils eins nach oben. (hier sind es zwei Antidiagonalen$\neq$0, also ist $A^3 = 0$). Außerdem wissen wir, dass der Vektor $A^2 v$ eine Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist; A ist also nicht invertierbar.

0.3 Übungsblatt

Skizze der Lösung zu Übungsblatt 1, Aufgabe 3 (a) und (b).

Beispiele des Resultats: Betrachte $V = \mathbb{R}^2$ und β das Standardskalarprodukt $\sum x_i y_i$. Ein $f \in Aut(V)$ ist eine lineare, bijektive Abbildung $f : V \to V$; Die Gruppe $Aut(V)$ können wir auch durch die Matrixdarstellungen beschreiben, $GL_2(\mathbb{R})$. Eine endliche Untergruppe ist z.B. die Gruppe

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (G, \circ) = (\{A, A^2 = Id_2\}, \text{ Matrixprodukt})$$

Die Elemente sind einmal $A =$ die Spiegelung an beiden Achsen, und $A^2 =$ die Identität. Definiere $\beta'(v, w) = \beta(A \cdot v, A \cdot w) + \beta(Id \cdot v, Id \cdot w)$. Das ist

$$\beta' = \beta(v, w) + \beta(v, w) = 2\beta(v, w)$$

Es ist also offensichtlich wieder positive definit und symmetrisch.

Warum funktioniert das so gut?

1. Wir können summieren, weil G endlich ist. Es ist also eine endliche Summe.
2. In jedem Summand steht wieder β drin, und das ist immer positiv; damit wird die Summe auch positiv.
3. A ist eine Matrix, eine lineare Abbildung, damit wird die Bilinearität folgen.
4. (zu b) $\beta^{'}(Av, Aw) = \beta(A^2v, A^2w) + \beta(Av, Aw) = \beta(v, w) + \beta(Av, Aw) = \beta^{'}(v, w)$. Das funktioniert, weil beim multiplizieren mit der Matrix A, "das g in ein Summand" (der das Inverse enthält) zur Identität wird, und "das g ein Summand" (der die Identität enthält) zu A wird.

Beweis im Detail: In der Übung.