Große Übung 2

(gehalten von F. Gauss)

0.1 Wiederholung

0.1.1 Trägheitssatz von Sylvester

(V, β) Vektorraum $\implies \exists$ OB $\implies \exists$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(\beta)$, die Diagonalgestalt hat.
Diagonale Matrix $\implies$ Eigenwerte stehen auf Diagonalen.
Neue OB = alte OB$\cdot r \in \mathbb{R}$ $\implies$ neue Eigenwerte = alte EWs $\cdot a^2$.

Beispiel: $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$, β Std. skalarprodukt und $\mathcal{A}' = (2e_1, 2e_2)$. Dann ist

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{A}'}(\beta) = 4 \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(\beta).$$

(Wir multiplizieren, egal wie wir uns Basis verändern, strecken, stauchen, nur mit positiven Zahlen, da der Faktor quadratisch ist. Die Anzahl an positiven und negativen Eigenwerten, im Beispiel, bleibt also gleich).

$\implies$ **Trägheitssatz von Sylvester** besagt, dass ist generell der Fall, egal zu welcher Basis wir übergehen und mit welchem Skalarprodukt wir starten.
In Formeln:

- β mit $B^t = B$, dann lassen sich B, β diagonalisieren;
- (n_+, n_0, n_-) oder $n_+ - n_-$ hängt nur von β, nicht von der Basis ab.
- $V = V_0 \oplus V_- \oplus V_+$

0.1.2 Unitäre Vektorräume

(V, β) heisst unitär, wenn V über $\mathbb{C}$ definiert ist, und β eine hermitesche positiv definite Form ist.
β ist hermitesch $\iff H^* = H$ (wenn H reell ist, $\iff H$ symmetrisch)
β is positiv definit $\iff$ Die Diagonalgestalt hat nur positive Einträge $\iff n_+ = n$.
Gram-Schmidt funktioniert und impliziert $\exists P$ mit $P^*HP = Id_n$.

Aufgabe 1. Trägheitssatz von Sylvester

$V = \mathbb{R}^3, \beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Diagonalisiere B.
Was sind die Eigenwerte?
Was ist die Signatur $n_- - n_+$? Was ist n_0?
Antworten:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =: diag(4, 0, -3) \text{ (Kurzschreibweise)}$$

$n_- - n_+ = 1 - 1$, $n_0 = 1$.

Betrachte die Matrix

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und diagonalisiere sie.
Antwort:

$$\tilde{B} \to diag(-1, 1, -1, -3) \quad n_+ = 1, n_0 = 0, n_- = 3$$

Aufgabe 2. unitäre Vektorräume

Betrachte

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{pmatrix}$$

zeige das dies ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ definiert; Das also $(\mathbb{C}^2, \beta)$ ein unitärer Vektorraum ist und diagonalisiere B.

Antwort: Die Matrix B is hermitesch; die Diagonalform ist $diag(2, 5)$. Die Matrix ist also positiv definit und damit auch β. Somit ist $(\mathbb{C}^2, \beta)$ ein unitärer Vektorraum.