Große Übung 1

0.1 Kurzversion von LA I

(Ziel: Vektorräume und ihre Abbildungen = Matrizen)

Kapitel	Objekt+Struktur	Beispiele
1. Mengen	M	$M = \{1, 2, A\}$
2. Gruppen	$(M, "+")$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_n$
3. Körper	$(M, +, \circ) := K$	$\mathbb{R}, \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$
4. Vektorräume	V über $K, \cong K^n$	$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$

Kapitel 5-7 handeln von Abbildungen von einen Vektorraum V in einen Vektorraum V' (möglicherweise der gleiche).

Wo ist der Unterschied zwischen $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R}^{2n}$?
$\Longrightarrow$ Kapitel 8. Euklidische Vektorräume (Vektorräume mit besonderer Extrastruktur)
$\Longrightarrow$ Kapitel 9. (Anfang von LA IIa.) Unitäre Vektorräume (Vektorräume mit anderer Extrastruktur)

Aufgabe 1. Bilinearformen

$\mathbb{R}^2, \beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\beta(v, w) = 2v_1w_1 - w_2$$

Ist dies eine Bilinearform? Ist

$$\tilde{\beta}(v, w) = 2v_1w_1 - v_2w_2$$

eine Bilinearform? Wie ist ihre Matrizendarstellung in Basis $\mathcal{A} = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ Standardbasis? Ist $\tilde{\beta}$ symmetrisch, entartet, positiv definit?

Antworten: β ist keine Bilinearform, $\tilde{\beta}$ ist eine. Sie ist symmetrisch, nicht ausgeartet und nicht positiv definit (*sie ist indefinit mit Signatur* $(1, 0, 1)$*, aber das ist nicht relevant für die Aufgabe*).

Aufgabe 2. Euklidische VRs und Gram-Schmidt

Betrachte $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt gegeben durch die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Führe die Basis $\mathcal{A}$ in eine ONB (Orthonormalbasis) über.

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Antwort: Wenn du mit $(1, 0, 0)^t$ anfängst, dann ist die neue ONB die Standardbasis. (Fängst du mit einem anderen Vektor an, kriegst du eine andere ONB)

Aufgabe 3. Euklidische VRs und Gram-Schmidt

Betrachte den euklidischen Vektorraum $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ mit dem (sogenannten L^2) Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Führe die folgende linear unabhängige Menge von Vektoren in eine orthonormale Menge über (natürlich ist das hier keine Basis! Dieser VR ist ∞-dimensional).

$$\mathcal{A} = \left(x, x^2\right).$$

Antwort: Die neue Menge ist

$$(\sqrt{3} \cdot x, \sqrt{80} \cdot (x^2 - \frac{4}{3}x)).$$