Übungsblatt 12

(Zusatzblatt – keine Abgabe*)

Aufgabe 1 *(20 Punkte)* Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \left\{ A \in \mathsf{Mat}(2,2;\mathbb{R}) \,|\, A^{\mathsf{t}} = A \right\} \subset \mathsf{Mat}(2,2;\mathbb{R})$$

und die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}(2,2;\mathbb{R})\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $A \in V$ auch $L^{\mathsf{t}} \cdot A \cdot L \in V$.

(b) Berechnen Sie die Determinante des Endomorphismus

$$\begin{array}{rcl} f : V & \to & V \\ A & \mapsto & L^{\mathsf{t}} \cdot A \cdot L \end{array}$$

Aufgabe 2 *(30 Punkte)* Sei

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 2 & 12 \\ 5 & 1 & 6 \\ -9 & -2 & -11 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}(3,3;\mathbb{R})\,.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenräume von A.

(c) Argumentieren Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie eine Basis von $\mathsf{Mat}(3,1;\mathbb{R})$ aus Eigenvektoren.

(d) Geben Sie eine diagonalisierende Matrix für A an, d.h. ein $T \in \mathsf{GL}_3(\mathbb{R})$, sodass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ eine Diagonalmatrix ist.

(e) Bestimmen Sie T^{-1}, und berechnen Sie $T^{-1} \cdot A \cdot T$.

Aufgabe 3 *(30 Punkte)* Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}(n,n;\mathbb{C})\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A gegeben ist durch

$$\chi_A(t) = t^n - 1\,.$$

(b) Argumentieren Sie, dass $\chi_A(t) = \prod_{j=0}^{n-1}(t - \xi^j)$, wobei $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

(c) Folgern Sie, dass A diagonalisierbar ist.

*Kontaktieren Sie Herrn Gauß, wenn Sie noch Punkte benötigen!

(d) Finden Sie eine diagonalisierende Matrix $T \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \xi & & & \\ & & \xi^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \xi^{n-1} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4 *(20 Punkte)* Untersuchen Sie, welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Am Donnerstag, 08.12. sind Vorlesung und große Übung vertauscht,
d.h. Vorlesung um 8:30 Uhr, große Übung um 10:15 Uhr.