Übungsblatt 11

Aufgabe 1 *(20 Punkte)* Sei K ein beliebiger Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für $\sigma \in S_n$ definiere die $n \times n$-Matrix $A(\sigma)$ über K durch

$$(A(\sigma))_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i = \sigma(j) \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

(a) Berechnen Sie die Determinante $\det(A(\sigma))$.

(b) Zeigen Sie dass die Abbildung $\sigma \longmapsto A(\sigma)$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus $S_n \longrightarrow \mathsf{GL}_n(K)$ ist.

Aufgabe 2 *(20 Punkte)* Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [4] & [0] \\ [2] & [0] & [1] \\ [3] & [1] & [3] \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}(3, 3; \mathbb{F}_5)$$

die komplementäre Matrix $A^\sharp$ und mit Hilfe der Cramerschen Regel die Inverse A^{-1}.

Aufgabe 3 *(15 Punkte)* Sei $A \in \mathsf{Mat}(n, n; \mathbb{R})$. Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(\mathbb{I}_n + t\,A) = \lim_{t \to 0} \frac{\det(\mathbb{I}_n + tA) - \det(\mathbb{I}_n)}{t} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} =: \mathsf{tr}(A)\,.$$

Aufgabe 4 *(15 Punkte)* Betrachten Sie den Polynomring $K[t]$, für einen beliebigen Körper K. Zeigen Sie, dass für $p, q \in K[t]$ gilt

(a) $\deg(p + q) \leq \max(\deg(p), \deg(q))$, mit Gleichheit falls $\deg(p) \neq \deg(q)$.

(b) $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$.

Aufgabe 5 *(30 Punkte)* Sei K ein Körper und $K[t]$ Polynomring.

(a) Betrachte die folgende Relation auf der Menge $K[t] \times (K[t] \setminus \{0\})$

$$(g_1, h_1) \sim (g_2, h_2) \;\Leftrightarrow\; g_1 \cdot h_2 = g_2 \cdot h_1\,.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $K(t) := (K[t] \times (K[t] \setminus \{0\}))/\sim$. Für die Äquivalenzklassen führen wir die Schreibweise $[(g, h)] =: \frac{g}{h}$ ein.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Verknüpfungen auf $K(t)$ wohldefiniert, d.h. unabhängig von den gewählten Repräsentanten der Äquivalenzklassen sind:

$$\frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} := \frac{g_1 \cdot h_2 + g_2 \cdot h_1}{h_1 \cdot h_2} \qquad \frac{g_1}{h_1} \cdot \frac{g_2}{h_2} := \frac{g_1 \cdot g_2}{h_1 \cdot h_2}\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass $(K(t), +, \cdot)$ ein Körper ist. Er wird Körper der **rationalen Funktionen** genannt.

Abgabe 29.11.2016*

*Lösungen bitte bis 10:15 Uhr in Kästen im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.