Übungsblatt 10

Aufgabe 1 *(10 Punkte)* Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie das die Komposition von Homomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V,W) \times \mathrm{Hom}(U,V) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(U,W) \\ (f,g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

eine bilineare (d.h. 2-multilineare) Abbildung ist.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)* Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{Mat}(3,1;\mathbb{R})$$

linear unabhängig?

Aufgabe 3 *(20 Punkte)* Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,4;\mathbb{R}) \quad B = \begin{pmatrix} [1] & [0] & [2] & [0] & [0] \\ [5] & [3] & [0] & [1] & [4] \\ [0] & [6] & [0] & [0] & [2] \\ [1] & [2] & [3] & [2] & [1] \\ [6] & [4] & [2] & [0] & [0] \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5,5;\mathbb{F}_7)\,.$$

Aufgabe 4 *(20 Punkte)* Sei K ein Körper und $a, b \in K$. Betrachten Sie die $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass $\det(A) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$.

Aufgabe 5 *(25 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $x_1, \dots, x_n \in K$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Formel für die "Vandermonde-Determinante"

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)\,. \qquad (*)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist das Produkt aller $(x_i - x_j)$ mit $1 \le i < j \le n$. (Tipp: Ziehen Sie für den Induktionsschritt die letzte von den anderen Spalten ab, und bringen dann die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix in der oberen linken Ecke wieder in die Form $(*)$, wobei nur noch die Variablen $x_1, \dots, x_{n-1}$ vorkommen.

Aufgabe 6 *(15 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathsf{SL}_n(\mathbb{Z}) := \{A \in \mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) \mid A \in \mathsf{Mat}(n,n;\mathbb{Z})\} \subset \mathsf{SL}_n(\mathbb{R})$$

all derjenigen Matrizen, deren Determinante 1 ist, und die nur ganzzahlige Einträge haben eine Untergruppe von $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R})$ ist.

Abgabe 22.11.2016*

*Lösungen bitte bis 10:15 Uhr in Kästen im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.