Übungsblatt 9

Aufgabe 1 *(25 Punkte)* Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$, und geben Sie den Lösungsraum an:

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 + 5\,x_5 &= 6 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 + x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 3\,x_3 + 5\,x_4 + 7\,x_5 &= 1 \\ x_3 + 2\,x_4 + 3\,x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *(25 Punkte)* Verwenden Sie elementare Zeilentransformationen, um die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [2] & [1] & [4] \\ [2] & [1] & [0] & [3] \\ [1] & [3] & [2] & [2] \\ [4] & [2] & [1] & [3] \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4, 4; \mathbb{F}_5)$$

über dem Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}_5$ zu invertieren.

Aufgabe 3 *(35 Punkte)* Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume mit geordneten Basen $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : V \to W$, die bestimmt ist durch

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -w_1 + 2w_2 + 4w_3 + w_4 & \qquad f(v_2) &= 2w_1 + w_3 + 3w_4 \\ f(v_3) &= 3w_1 + w_2 - w_4 & f(v_4) &= w_1 + 8w_2 + 11w_3 - 2w_4 \\ f(v_5) &= w_2 + 6w_3 + 8w_4 \end{aligned}$$

Verwenden Sie die Matrixdarstellung $\text{Mat}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(f)$, um den Rang von f, und Basen des Kerns und des Bildes von f zu bestimmen.

Aufgabe 4 *(25 Punkte)* Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & t-3 \\ -1 & -t & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{R}), \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 1; \mathbb{R}),$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Parameter ist. Bestimmen Sie den Lösungsraum $\text{Lös}(A, b)$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Verwenden Sie dazu (eine Variation) des Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 5 *(15 Punkte)* Sei K ein Körper. Eine Matrix $M \in \text{Mat}(n, n; K)$ heißt **nilpotent**, falls es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $M^k = 0$ (k-faches Matrixprodukt). Seien nun $A, B \in \text{Mat}(n, n; K)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \cdot B$ nilpotent, so auch $B \cdot A$.

(b) Falls sowohl A als auch B nilpotent sind, und außerdem $A \cdot B = B \cdot A$, so ist auch $A + B$ nilpotent. (Tipp: Vgl. Aufgabe 6 auf Blatt 4.)

Abgabe 15.11.2016*

*Lösungen bitte bis 10:15 Uhr in Kästen im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.