Übungsblatt 8

Aufgabe 1 *(20 Punkte)* Sei p ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $p^2 = p$ (Solche p nennt man *idempotent*, bzw. *Projektionen*.)

(2) Es gibt eine ganze Zahl k mit $0 \leq k \leq n$ und eine Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von V,

$$\text{sodass } p(e_i) = \begin{cases} e_i\,, & i \leq k \\ 0\,, & i > k \end{cases} .$$

(Tipp: Denken Sie über Bild und Kern von p nach. Aufgabe 4 von Übungsblatt 5 könnte ggf. nützlich sein.)

Aufgabe 2 *(10 Punkte)* Zeigen Sie, dass für beliebige Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(m, n; K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n, o; K)$ gilt $(A \cdot B)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} \cdot A^{\mathrm{t}}$. Folgern Sie $\left(C^{\mathrm{t}}\right)^{-1} = (C^{-1})^{\mathrm{t}}$ für invertierbare Matrizen $C \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Aufgabe 3 *(25 Punkte)* Seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume mit geordneten Basen $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : V \to W$, die definiert ist durch

$$f(v_1) = w_1 + 2w_2\,, \quad f(v_2) = 2w_1 - w_2\,, \quad f(v_3) = 3w_1 + w_2\,.$$

(a) Berechnen Sie die Matrixdarstellung $\mathrm{Mat}_{\mathcal{AB}}(f)$ von f bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(b) Seien $\mathcal{A}' = (v_1' = v_1 + 2v_2 + 3v_3, v_2' = v_1 + v_2, v_3' = v_2 - 3v_3)$ und $\mathcal{B}' = (w_1' = w_1 + w_2, w_2' = w_1 - 2w_2)$ zwei andere Basen. Berechnen Sie die Basiswechsel-Matrizen $\mathrm{Mat}_{\mathcal{A}'\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathcal{BB}'}(\mathrm{id}_W)$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Basiswechsel-Matrizen die Matrixdarstellung von f bzgl. der Basen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$, und lesen Sie daraus ab, wie sich $f(v_1')$, $f(v_2')$ und $f(v_3')$ als Linearkombinationen von w_1' und w_2' schreiben lassen.

Aufgabe 4 *(25 Punkte)* Betrachten Sie, wie in Aufgabe 3 auf Übungsblatt 5, den Körper $\mathbb{F}_9$ als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_3$.

(a) Argumentieren Sie (kurz), dass für alle $k \in \mathbb{F}_9$ die Abbildung

$$\begin{aligned} g_k : \mathbb{F}_9 &\to \mathbb{F}_9\,, \\ l &\mapsto g_k(l) = k\,l \end{aligned}$$

die Element $l \in \mathbb{F}_9$ auf das Produkt (Körper-Multiplikation) $k\,l$ abbildet, linear ist.

(b) Wählen Sie, wie in Aufgabe 3 auf Übungsblatt 5 eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{F}_9$ als Vektorraum über $\mathbb{F}_3$, und berechnen Sie die Matrixdarstellung $M_a = \mathrm{Mat}_{\mathcal{BB}}(g_a)$ und $M_e = \mathrm{Mat}_{\mathcal{BB}}(g_e)$ der Abbildungen g_a, g_e in dieser Basis. (Multiplikationstabelle von $\mathbb{F}_9$ in Aufgabe 1 von Übungsblatt 4)

(c) Berechnen Sie das Matrixprodukt $M_a \cdot M_e$ und überprüfen Sie, dass dies tatsächlich der Matrixdarstellung $\mathrm{Mat}_{\mathcal{BB}}(g_a \circ g_e)$ entspricht.

Aufgabe 5 *(20 Punkte)* Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.
(Tipp: Argumentieren Sie, dass eine quadratische Matrix invertierbar ist, wenn ihre Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Berechnen Sie sukzessive, wieviele Wahlmöglichkeiten Sie für den ersten, den zweiten, usw. Spaltenvektor haben.)

(b) Geben Sie alle Elemente der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ an.

Abgabe <u>Mittwoch 02.11.2016!!!</u>*

Die Probeklausur findet am **Samstag 05.11. 10 Uhr** in Hörsaal **B6 A001** statt.

*Lösungen bitte bis 10:15 Uhr in Kästen im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.