# Übungsblatt 7

**Aufgabe 1** *(20 Punkte)* Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für die Matrixmultiplikation: seien $A, A' \in \mathrm{Mat}(m, n; K)$, $B, B' \in \mathrm{Mat}(n, o; K)$, $C \in \mathrm{Mat}(o, p; K)$, $k \in K$

**(a)** $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (Assoziativitätsgesetz)

**(b)** $(A + A') \cdot B = (A \cdot B) + (A' \cdot B)$ (Distributivgesetz)
$A \cdot (B + B') = (A \cdot B) + (A \cdot B')$

**(c)** $A \cdot (k\, B) = k(A \cdot B) = (k\, A) \cdot B$ (Skalare Multiplikation)

**Aufgabe 2** *(30 Punkte)* Berechnen Sie die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Zeilen- und Spaltenvektoren von $A$ an. Berechnen Sie außerdem das folgende Matrixprodukt über dem Körper $\mathbb{F}_9$ aus Aufgabe 1 von Blatt 4:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 3** *(20 Punkte)* Sei $K$ ein Körper und $a, b, c, d \in K$. Wann ist die lineare Abbildung $f : K^2 \to K^2$, die die Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ von $K^2$ auf die Vektoren

$$f(e_1) = v_1 = ae_1 + be_2 \text{ und } f(e_2) = v_2 = ce_1 + de_2$$

abbildet ein Isomorphismus? (Tipp: Wann sind die Vektoren $v_1$ und $v_2$ linear unabhängig?) Konstruieren Sie in diesem Fall die Umkehrabbildung $g : K^2 \to K^2$ (die $f \circ g = \mathrm{id}_{K^2}$ erfüllt). Berechnen Sie $g(e_1)$ und $g(e_2)$.

**Aufgabe 4** *(30 Punkte)* Betrachten Sie den Vektorraum Mat$(2,2;\mathbb{R})$ der $2\times 2$-Matrizen mit reellen Einträgen.

**(a)** Zeigen Sie, dass

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von Mat$(2,2;\mathbb{R})$ ist.

**(b)** Betrachten Sie nun die lineare Abbildung $f$ : Mat$(2,2;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, die die $A_i$ wie folgt abbildet

$$f(A_1) = e_2\,,\ f(A_2) = e_2\,,\ f(A_3) = 2\,e_1 + e_2\,,\ f(A_4) = -e_2\,,$$

wobei $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bilden. Wie ist die Dimension des Bildes im$(f)$ von $f$. Schließen Sie damit auf die Dimension des Kerns ker$(f)$.

**(c)** Berechnen Sie ker$(f)$, und geben Sie eine Basis davon an.

**(d)** Erweitern Sie diese Basis zu einer Basis von ganz Mat$(2,2;\mathbb{R})$.

**Abgabe 25.10.2016***

Die Probeklausur findet am **Samstag 05.11. 10 Uhr** in Hörsaal **B6 A001** statt.

*Lösungen bitte bis 10:15 Uhr in Kästen im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.