Übungsblatt 6

Aufgabe 1 *(30 Punkte)*

(a) Betrachten Sie den Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ aus Aufgabe 1 von Übungsblatt 3. Wie in der Vorlesung diskutiert ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Unterkörper. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kann also als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ angesehen werden. Geben Sie eine Basis dieses Vektorraumes an, und bestimmen Sie seine Dimension.

(b) Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$$

ein Untervektorraum von V ist. Geben Sie eine Basis von W an, und berechnen Sie $\dim(W)$.

(c) Gibt es einen Vektorraum mit 25 Elementen über dem Körper $\mathbb{F}_3$?

Aufgabe 2 *(20 Punkte)* Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f\left((x_1, x_2, x_3, x_4)\right) = (2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_4, 4x_1 + 11x_2 + 13x_3 - x_4)$$

Bestimmen Sie, ob f injektiv, surjektiv, bijektiv oder linear ist.

Aufgabe 3 *(20 Punkte)* Seien V, W Vektorräume über einem Körper K, und $f : V \longrightarrow W$ eine bijektive lineare Abbildung (also ein Isomorphismus). Zeigen Sie, dass auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \longrightarrow V$ linear ist.

Aufgabe 4 *(30 Punkte)* Sei K ein Körper. Ein *Polynom* über K ist ein formaler Ausdruck der Form $P = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ wobei $n \in \mathbb{N}$ und die $a_i \in K$ sind. Polynome kann man mit Elementen $k \in K$ multiplizieren

$$k \cdot P := (ka_0) + (ka_1)t + (ka_2)t^2 + \ldots + (ka_n)t^n\,,$$

und wie folgt addieren: für $Q = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$ gilt

$$P + Q := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \ldots + (a_k + b_k)t^k\,,$$

wobei hier $k \geq n, m$ gewählt ist, und $a_i = 0 = b_j$ für alle $i > n$ und $j > m$. Man sieht leicht, dass $K[t]$ vermöge dieser Operationen ein Vektorraum über K ist. Ist die Menge $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ der Monome t^n, $n \in \mathbb{N}_0$ linear unbhängig in $K[t]$? Ist sie eine Basis?

Geben Sie einen injektiven Endomorphismus $K[t] \to K[t]$ an, der nicht surjektiv ist.

Abgabe 18.10.2016*

*Lösungen bitte bis 10:15 Uhr in Kästen im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.