Universität Mannheim | Lineare Algebra I
Prof. Dr. Daniel Roggenkamp, Falko Gauß | 04.10.2016

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 *(20 Punkte)*

(a) Geben Sie die multiplikativen Inversen aller Elemente ungleich 0 des Körper $\mathbb{F}_7$ an.

(b) Zeigen Sie, dass in einem endlichen Körper K gilt

$$\prod_{k \in K^*} k = -1\,.$$

Folgern Sie, dass für jede Primzahl p die Zahl $(p-1)! + 1$ durch p teilbar ist.

Aufgabe 2 *(30 Punkte)* Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$.

(a) Sind die Teilmengen

$$S = \{(1,0,2),(3,4,0),(2,2,1)\} \text{ und } T = \{(1,2,3),(2,1,1),(1,0,0)\}$$

linear unabhängig, ein Erzeugendensystem von V, eine Basis von V? (Mit Begründung!)

(b) Geben Sie drei linear abhängige Vektoren in V an, von denen je zwei linear unabhängig sind.

(c) Geben Sie vier Vektoren in V an, von denen je drei eine Basis bilden.

(d) Geben Sie eine Basis der linearen Hülle

$$\mathcal{L}\left(\{(1,1,-2),(-3,2,1),(0,1,-1),(-2,1,1)\}\right) \subseteq V$$

an.

Aufgabe 3 *(20 Punkte)* Betrachten Sie den Körper $\mathbb{F}_9$ aus Aufgabe 1 von Übungsblatt 4. Anhand der Tabellen für Multiplikation und Addition sieht man leicht, dass die Teilmenge $\{0,1,2\}$ ein Unterkörper von $\mathbb{F}_9$ ist, und dass dieser isomorph zu $\mathbb{F}_3$ ist. (Machen Sie sich das klar!) Wir identifizieren den Unterkörper mit $\mathbb{F}_3$.

Wie in der Vorlesung besprochen ist jeder Körper Vektorraum über seinen Unterkörpern. (Rufen Sie sich das in Erinnerung: wodurch sind Vektoraddition und skalare Multiplikation definiert, und warum gelten die Vektorraumaxiome?) Also ist auch $\mathbb{F}_9$ Vektorraum über dem Unterkörper $\mathbb{F}_3$.

Geben Sie eine Basis von $\mathbb{F}_9$ als Vektorraum über $\mathbb{F}_3$ an. Wie ist seine Dimension? (Tipp: wieviele Basisvektoren werden mindestens benötigt, um auf die erforderliche Anzahl von Linearkombinationen zu kommen? Wählen Sie Basisvektoren aus und machen Sie dann eine Liste aller Linearkombinationen.)

Aufgabe 4 *(30 Punkte)* Seien V ein Vektorraum über einem Körper K, und $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass $W_1 \cap W_2$, und $W_1 + W_2 := \{v_1 + v_2 \,|\, v_1 \in W_1 \;\; \wedge \;\; v_2 \in W_2\}$ Untervektorräume von V sind.

(b) Seien nun W_1 und W_2 endlich-dimensional. Zeigen Sie, dass dann auch $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2$ endlich-dimensional sind, und dass gilt

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)\,.$$

(Tipp: Starten Sie mit einer Basis von $W_1 \cap W_2$ und ergänzen Sie diese zu Basen von W_1 und W_2. Können Sie daraus eine Basis von $W_1 + W_2$ konstruieren?)

Abgabe 11.10.2016*

*Lösungen bitte bis 10:15 Uhr in Kästen im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.