Universität Mannheim — Lineare Algebra I
Prof. Dr. Daniel Roggenkamp, Falko Gauß — 27.09.2016

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 *(30 Punkte)* Die folgenden Tabellen definieren die Addition und Multiplikation in einem Körper mit den 9 Elementen $0, 1, 2, a, b, c, d, e, f$.

$+$	0	1	2	a	b	c	d	e	f
0	0	1	2	a	b	c	d	e	f
1	1	2	0	b	c	a	e	f	d
2	2	0	1	c	a	b	f	d	e
a	a	b	c	d	e	f	0	1	2
b	b	c	a	e	f	d	1	2	0
c	c	a	b	f	d	e	2	0	1
d	d	e	f	0	1	2	a	b	c
e	e	f	d	1	2	0	b	c	a
f	f	d	e	2	0	1	c	a	b

$\cdot$	0	1	2	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	a	b	c	d	e	f
2	0	2	1	d	f	e	a	c	b
a	0	a	d	e	1	b	c	f	2
b	0	b	f	1	c	d	2	a	e
c	0	c	e	b	d	2	f	1	a
d	0	d	a	c	2	f	e	b	1
e	0	e	c	f	a	1	b	2	d
f	0	f	b	2	e	a	1	d	c

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke in diesem Körper:

- $\frac{a+2b}{e+2f}$
- $b^3 - f^3 + e^3$
- a^n für alle $n \in \{0, 1, \ldots, 8\}$
- $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}}}$

und bestimmen Sie alle vierten Wurzeln von -1, d.h. alle x, mit $x^4 = -1$.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)* Beweisen Sie, dass alle Körperhomomorphismen injektiv sind.

Aufgabe 3 *(20 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen

$$(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

einen Körper bildet.

Aufgabe 4 *(20 Punkte)* Zeigen Sie die Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag von komplexen Zahlen

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

(Tipp: Das ist äquivalent zu $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$.)

Aufgabe 5 *(20 Punkte)*

(a) Geben Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen an:

$$z_1 := \frac{1}{i}, \quad z_2 := -\frac{1-i}{1+i} + \frac{2-4i}{3}, \quad z_3 := \frac{(1+i)^2}{4} - \frac{6-3i}{i^3}, \quad z_4 := (1+i)^2(1-i)^2.$$

(b) Sei $c = a + ib \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass für

$$\zeta := \sqrt{\frac{1}{2}(a + |c|)} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{1}{2}(-a + |c|)}$$

$\zeta^2 = c$ gilt.

(c) Geben Sie von folgenden Zahlen den Realteil und den Imaginärteil an:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2014} \quad \text{und} \quad e^{\pi i} + e^{-\pi i}.$$

Aufgabe 6 *(20 Punkte)* **Zusatzaufgabe – Binomialkoeffizienten**

Seien x und y Elemente eines beliebigen Körpers. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n dass

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n} y^n, \tag{1}$$

wobei für $n, i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq i \leq n$ die Binomialkoeffizienten gegeben sind durch

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \qquad n! = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\ldots 1, & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases}.$$

Überprüfen Sie dazu die Aussage zuerst für $n = 0$. Für den Induktionsschritt nehmen Sie an, dass die Aussage für n gilt. Berechnen Sie dann $(x+y)^{n+1}$ unter Verwendung der Formel (1) für $(x+y)^n$. Zeigen Sie, dass das Resultat gerade dem Ausdruck (1) für $(x+y)^{n+1}$ entspricht.

Abgabe 04.10.2016*

*Lösungen bitte bis 10:15 Uhr in Kästen im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.