Übungsblatt 3

Aufgabe 1 *(30 Punkte)* Sei $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ die Menge derjenigen reellen Zahlen, die sich als Summe von rationalen Zahlen und rationalen Vielfachen von $\sqrt{2}$ schreiben lassen:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist. (Tipp: für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.)

(b) Zeigen Sie außerdem, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körper ist.

Aufgabe 2 *(20 Punkte)* Seien G, H Gruppen, und $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: φ ist injektiv genau dann, wenn ker$(\varphi) = \{e_G\}$ gilt.

Aufgabe 3 *(40 Punkte)* Betrachten Sie eine endliche Gruppe $G = \{e = g_1, g_2, \dots, g_n\}$ bestehend aus n Elementen g_i.

(a) Argumentieren Sie, dass es für alle $g \in G$ eine Permutation $\pi_g \in S_n$ gibt, sodass die Gruppenverknüpfung geschrieben werden kann als

$$g \cdot g_i = g_{\pi_g(i)}\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow S_n \\ g &\longmapsto \pi_g \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass φ injektiv ist.

(d) Argumentieren Sie, dass das Bild $\varphi(G)$ eine zu G isomorphe Untergruppe von S_n ist.

Herzlichen Glückwunsch – Sie haben Cayley's Theorem bewiesen, das besagt, dass jede endliche Gruppe isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe ist.

Aufgabe 4 *(10 Punkte)* Schreiben Sie die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

als Produkt von höchstens 4 Transpositionen, und bestimmen Sie $sign(\pi)$.

Abgabe 27.09.2016*

*Lösungen bitte bis 10:15 Uhr in Kästen im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.