Übungsblatt 2

Aufgabe 1 *(20 Punkte)* Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Das Bild $f(M)$ des gesamten Definitionsbereichs von f wird auch das Bild der Abbildung f genannt. Berechnen Sie die Bilder der folgenden Abbildungen, und die Urbilder jedes Elements der Bilder:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

(b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto h(x, y) = (2x - y, -4x + 2y)$

Aufgabe 2 *(20 Punkte)* Zeigen Sie, dass die folgende Relation auf $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation ist:

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \sin^2(x) + \cos^2(y) = 1\,.$$

Aufgabe 3 *(30 Punkte)* Betrachten Sie die Menge $M = \{0, \dots, 8\}$. Zeigen Sie, dass die Relation

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 \text{ ist durch 3 teilbar}$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert und berechnen Sie die Äquivalenzklassen. (Zusatzaufgabe: In der Tat definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf ganz $\mathbb{Z}$. Wie sehen die Äquivalenzklassen für diesen Fall aus?)

Aufgabe 4 *(30 Punkte)* Betrachten Sie die Verknüpfung $*$ auf $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$(\alpha, a) * (\beta, b) = (\alpha\beta, a + \alpha b)\,,$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{>0}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}, *)$ eine Gruppe ist. Ist sie abelsch?

Abgabe 20.09.2016*

*Lösungen bitte bis 10:15 Uhr in entsprechenden Kasten im Eingangsbereich des C-Teils von A5 einwerfen.