Lineare Algebra I

- 4. Vorlesung -

Prof. Dr. Daniel Roggenkamp
&
Falko Gauß

Gruppen:

Definition 2.1. Eine **Gruppe** ist ein Paar $(G, \cdot)$ bestehend aus einer Menge G zusammen mit einer Abbildung $\cdot : G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \longmapsto g \cdot h$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(G1) $(g \cdot h) \cdot i = g \cdot (h \cdot i)$ für alle $g, h, i \in G$ (Assoziativität)

(G2) es gibt ein $e \in G$, so dass $g \cdot e = g$ für alle $g \in G$ (rechts-neutrales Element)

(G3) für alle $g \in G$ gibt es ein $g' \in G$, so dass $gg' = e$ (rechts-Inverses)

Eine Gruppe heißt **abelsch** oder **kommutativ**, falls zusätzlich gilt

(G4) $g \cdot h = h \cdot g$, für alle $g, h \in G$ (Kommutativität)

(Manchmal schreibt man auch gh für $g \cdot h$.)

Gruppen:

Definition 2.1. Eine **Gruppe** ist ein Paar $(G, \cdot)$ bestehend aus einer Menge G zusammen mit einer Abbildung $\cdot : G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \longmapsto g \cdot h$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(G1) $(g \cdot h) \cdot i = g \cdot (h \cdot i)$ für alle $g, h, i \in G$ (Assoziativität)

(G2) es gibt ein $e \in G$, so dass $g \cdot e = g$ für alle $g \in G$ (rechts-neutrales Element)

(G3) für alle $g \in G$ gibt es ein $g' \in G$, so dass $gg' = e$ (rechts-Inverses)

Eine Gruppe heißt **abelsch** oder **kommutativ**, falls zusätzlich gilt

(G4) $g \cdot h = h \cdot g$, für alle $g, h \in G$ (Kommutativität)

(Manchmal schreibt man auch gh für $g \cdot h$.)

Beispiele:

$(\mathbb{Z}, +)$

$(\mathbb{R}, +)$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Diedergruppe D_3

Satz 2.3.

(1) Sei g' rechts-invers zu $g \in G$. Dann gilt auch $g'g = e$, d.h. g' ist auch links-invers zu g.
(2) Das rechts-neutrale Element $e \in G$ ist auch links-neutral, d.h. $e \cdot g = g$ für alle $g \in G$.
(3) Das neutrale Element ist eindeutig, d.h. falls $gh = g$ so ist $h = e$.
(4) Das Inverse g' zu $g \in G$ ist eindeutig, wir nennen es $g' =: g^{-1}$.

Satz 2.3.

(1) Sei g' rechts-invers zu $g \in G$. Dann gilt auch $g'g = e$, d.h. g' ist auch links-invers zu g.
(2) Das rechts-neutrale Element $e \in G$ ist auch links-neutral, d.h. $e \cdot g = g$ für alle $g \in G$.
(3) Das neutrale Element ist eindeutig, d.h. falls $gh = g$ so ist $h = e$.
(4) Das Inverse g' zu $g \in G$ ist eindeutig, wir nennen es $g' =: g^{-1}$.

(1) rechts-invers ⇒ links-invers: $g * g' = e \quad \Rightarrow \quad g' * g = e$

Satz 2.3.

(1) Sei g' rechts-invers zu $g \in G$. Dann gilt auch $g'g = e$, d.h. g' ist auch links-invers zu g.
(2) Das rechts-neutrale Element $e \in G$ ist auch links-neutral, d.h. $e \cdot g = g$ für alle $g \in G$.
(3) Das neutrale Element ist eindeutig, d.h. falls $gh = g$ so ist $h = e$.
(4) Das Inverse g' zu $g \in G$ ist eindeutig, wir nennen es $g' =: g^{-1}$.

(1) rechts-invers ⇒ links-invers: $g * g' = e \quad \Rightarrow \quad g' * g = e$

(2) rechts-neutral ⇒ links-neutral: $g * e = g \quad \Rightarrow \quad e * g = g$

Satz 2.3.

(1) Sei g' rechts-invers zu $g \in G$. Dann gilt auch $g'g = e$, d.h. g' ist auch links-invers zu g.
(2) Das rechts-neutrale Element $e \in G$ ist auch links-neutral, d.h. $e \cdot g = g$ für alle $g \in G$.
(3) Das neutrale Element ist eindeutig, d.h. falls $gh = g$ so ist $h = e$.
(4) Das Inverse g' zu $g \in G$ ist eindeutig, wir nennen es $g' =: g^{-1}$.

(1) rechts-invers ⇒ links-invers: $g * g' = e \quad \Rightarrow \quad g' * g = e$

(2) rechts-neutral ⇒ links-neutral: $g * e = g \quad \Rightarrow \quad e * g = g$

(3) Eindeutigkeit des neutralen Elements

Satz 2.3.
(1) Sei g' rechts-invers zu $g \in G$. Dann gilt auch $g'g = e$, d.h. g' ist auch links-invers zu g.
(2) Das rechts-neutrale Element $e \in G$ ist auch links-neutral, d.h. $e \cdot g = g$ für alle $g \in G$.
(3) Das neutrale Element ist eindeutig, d.h. falls $gh = g$ so ist $h = e$.
(4) Das Inverse g' zu $g \in G$ ist eindeutig, wir nennen es $g' =: g^{-1}$.

(1) rechts-invers ⇒ links-invers: $g * g' = e \quad \Rightarrow \quad g' * g = e$

(2) rechts-neutral ⇒ links-neutral: $g * e = g \quad \Rightarrow \quad e * g = g$

(3) Eindeutigkeit des neutralen Elements

(4) Eindeutigkeit des Inversen: $g^{-1} := g'$

Proposition 2.12. Seien G und H zwei Gruppen und $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(1) Dann gilt $\varphi(e_G) = e_H$ und $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ für alle $g \in G$.

(2) Sei $G' \subseteq G$ eine Untergruppe von G, dann ist $\varphi(G')$ eine Untergruppe von H. Insbesondere ist $\varphi(G)$ Untergruppe von H.

(3) Ist $H' \subseteq H$ eine Untergruppe von H, so ist auch $\varphi^{-1}(H')$ eine Untergruppe von G. Insbesondere ist der **Kern** $ker(\varphi) := \varphi^{-1}(\{e_H\}) \subset G$ eine Untergruppe.[4]

(4) Ist φ ein Gruppenisomorphismus, so gilt das auch für die Umkehrabbildung φ^{-1}.