Probeklausur – Lineare Algebra I

– Deckblatt –

- Dieses Blatt erst umblättern, wenn Sie dazu aufgefordert werden!
- Tragen Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer unten ein.
- Kreuzen Sie in der Tabelle unten an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben. Die anderen Spalten bitte freilassen.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis für die Klausuraufsicht sichtbar neben sich auf den Tisch.
- Die Klausur dauert 90 Minuten.
- Korrigiert werden die Aufgabenzettel und die Kanzleibögen. Die gelben Blätter werden nicht eingesammelt.
- Schreiben Sie Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Blatt, das Sie abgeben.

Name, Vorname: ______________________________

Matrikel-Nummer: ____________ **Übungsgruppe:** ______

Aufgabe	Bearbeitet	Punkte	
1		/28	
2		/24	
3		/24	
4		/24	
5		/24	
6		/26	
7		/24	
8		/26	
9		/30	
		/230	

Probeklausur

Aufgabe 1 *(28 Punkte)* Betrachten Sie die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} f_4 : \mathbb{Z}_5 = \mathbb{F}_5 &\to \mathbb{Z}_5 = \mathbb{F}_5 \\ [0] &\mapsto [0] \\ [1] &\mapsto [4] \\ [2] &\mapsto [3] \\ [3] &\mapsto [2] \\ [4] &\mapsto [1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{\geq 0} \\ x &\mapsto (x+1)^2 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (3x-1) \end{aligned},$$

und markieren Sie in der folgenden Tabelle mit **W** für “wahr” und **F** für “falsch”, ob sie injektiv, surjektiv, bijketiv, linear sind.

Funktion	ist injektiv	ist surjektiv	ist bijektiv	ist linear
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				

Aufgabe 2 *(8+16 Punkte)*

(a) Geben Sie in der folgenden Tabelle die multiplikativen Inversen k^{-1} der Elemente k des endlichen Körpers $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{F}_5$ an:

k	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
k^{-1}				

(b) Geben Sie Realteil, Imaginärteil, Betrag und Argument der komplexen Zahl

$$z = \frac{1+2i}{1-i} + 1 - i \quad \text{an:}$$

$\Re(z)$	$\Im(z)$	$\lvert z \rvert$	arg(z)

Name: ____________________ Matrikel-Nr: ____________

Aufgabe 3 *(24 Punkte)* Markieren Sie mit **W** für "wahr" und **F** für "falsch", welche der folgenden Aussagen zutreffen:

- ☐ $\{(1,0),(0,0)\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$.
- ☐ $\{([2],[3]),([4],[1])\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{F}_5^2 = \mathbb{Z}_5^2$.
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig in Mat$(2,2;\mathbb{R})$.

Aufgabe 4 *(24 Punkte)* Sei K ein Körper, $m,n \in \mathbb{N}$ und $A \in$ Mat$(m,n;K)$ eine $m \times n$-Matrix. Sei ferner

$$\begin{aligned} f : \text{Mat}(n,1;K) &\rightarrow \text{Mat}(m,1;K) \\ x &\mapsto A \cdot x \end{aligned}$$

die lineare Abbildung, die Spaltenvektoren x mit der Matrix A multipliziert. Markieren Sie mit **W** für "wahr" und **F** für "falsch", welche der folgenden Aussagen zutreffen:

- ☐ Falls Rang$(A) = n$, so ist f surjektiv.
- ☐ Falls Rang$(A) = n$, so ist f injektiv.
- ☐ Rang$(A) \leq$ min$\{m,n\}$.
- ☐ Falls Rang$(A) = n$, so sind die Spaltenvektoren von A linear unabhängig.

Aufgabe 5 *(4+4+4+12 Punkte)* Seien V und W Vektorräume über einem Körper K.

(a) Wann ist eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ linear? (Geben Sie die Definition an.)

(b) Wie sind der Kern und das Bild von f definiert?

(c) In welchem Verhältnis stehen die Dimension von Kern und Bild von f? (Geben Sie eine Formel an – keinen Beweis!)

(d) Sei $\{v_1,\ldots,v_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist injektiv.

(2) $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 6 *(8+12+6 Punkte)* Betrachten Sie die Menge

$$U := \left\{A \in \text{Mat}(2,2;\mathbb{R}) \,|\, A - A^t = 0\right\} .$$

(a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von Mat$(2,2;\mathbb{R})$ ist.
(b) Geben Sie eine Basis S von U an. (Mit Beweis, dass es sich um eine solche handelt.) Wie ist die Dimension von U?
(c) Ergänzen Sie S zu einer Basis von ganz Mat$(2,2;\mathbb{R})$. (Mit Begründung.)

Aufgabe 7 *(10+14 Punkte)* Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ mit geordneten Basen $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$. Betrachten Sie die lineare Abbildung, die definiert ist durch

$$f(v_1) = w_1 + w_2 - 2\,w_3\,, \quad f(v_2) = w_1 - w_2\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung Mat$_{\mathcal{AB}}(f)$ von f bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
(b) Sei $\mathcal{A}' = (v_1' = v_1 + 2v_2, v_2' = 3v_1 - v_2)$ eine weitere Basis von V. Berechnen Sie Mat$_{\mathcal{A'B}}(f)$, indem sie die entsprechende Basiswechsel-Matrix bestimmen, und Mat$_{\mathcal{AB}}(f)$ mit dieser multiplizieren.

Aufgabe 8 *(26 Punkte)* Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) ker$(f) \cap$ im$(f) = \{0\}$
(2) ker$(f \circ f) =$ ker(f)

Aufgabe 9 – Zusatzaufgabe *(30 Bonus-Punkte)* Bestimmen Sie die Anzahl der 2-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{F}_p^5$. (Mit Begründung. Tipp: Wieviele Paare linear unabhängiger Vektoren gibt es im $\mathbb{F}_p^5$?)

Viel Erfolg!