Musterlösungen 12

Aufgabe 1

(a) Sei $A \in V$. Dann gilt $\left(L^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot L\right)^{\mathrm{t}} = L^{\mathrm{t}} \cdot A^{\mathrm{t}} \cdot \left(L^{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{t}} = L^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot L$. Falls also $A \in V$, so ist auch $L^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot L \in V$.

(b) Bestimme zunächst eine Matrixdarstellung des Endomorphismus f. Es gilt

$$V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}(2,2;\mathbb{R}) \,\middle|\, b = c \right\} .$$

Daher ist

$$\mathcal{A} = \left(A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von V. Man rechnet nun leicht nach

$$\begin{aligned} f(A_1) &= L^{\mathrm{t}} \cdot A_1 \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A_1 + 4A_2 + 2A_3 \,. \\ f(A_2) &= L^{\mathrm{t}} \cdot A_1 \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 4A_2 \,. \\ f(A_3) &= L^{\mathrm{t}} \cdot A_1 \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \\ &= -8A_2 + -2A_3 \,. \end{aligned}$$

Also

$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{A}\,\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} =: B \,.$$

Nach Proposition 6.12. entsprechen Determinanten von Endomorphismen gerade den Determinanten ihrer Matrixdarstellungen. Die Determinante von B läßt sich leicht berechnen, z.B. durch Entwicklung nach der 2. Spalte:

$$\det(B) = 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -8 \,.$$

Es gilt also $\det(f) = \det(B) = -8$.

Aufgabe 2 Sei

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 2 & 12 \\ 5 & 1 & 6 \\ -9 & -2 & -11 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}(3,3;\mathbb{R}) \,.$$

(a) Das charakteristische Polynom berchnet man leicht, z.B. durch Entwicklung der Determinanten nach der 1. Spalte:

$$\begin{aligned}\chi_A(t) &= \det(t\mathbb{I}_3 - A) = \det\begin{pmatrix} t-10 & -2 & -12 \\ -5 & t-1 & -6 \\ 9 & 2 & t+11 \end{pmatrix} \\ &= (t-10)\det\begin{pmatrix} t-1 & -6 \\ 2 & t+11 \end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 2 & t+11 \end{pmatrix} + 9\det\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ t-1 & -6 \end{pmatrix} \\ &= (t-10)(t^2+10t+1) - 10(t-1) + 108t = t^3 - t = t(t-1)(t+1)\,. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also gerade $\{0, 1, -1\}$.

(b) Die Eigenräume berechnet man durch lösen von linearen Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} V_0(A) &= \ker(A) = \ker\begin{pmatrix} 10 & 2 & 12 \\ 5 & 1 & 6 \\ -9 & -2 & -11 \end{pmatrix} \\ &\overset{Z^{12}}{=} \ker\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 10 & 2 & 12 \\ -9 & -2 & -11 \end{pmatrix} \overset{Z^{31}(\frac{9}{5})\circ Z^{21}(-2)}{=} \ker\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &\overset{Z^{23}\circ Z^{2}(-5)}{=} \ker\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1(A) &= \ker(A - \mathbb{I}_3) = \ker\begin{pmatrix} 9 & 2 & 12 \\ 5 & 0 & 6 \\ -9 & -2 & -12 \end{pmatrix} \\ &\overset{Z^{12}\circ Z^{31}(1)}{=} \ker\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 9 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z^{21}(-\frac{9}{5})}{=} \ker\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\overset{Z^{2}(\frac{5}{2})}{=} \ker\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{-1}(A) &= \ker(A + \mathbb{I}_3) = \ker\begin{pmatrix} 11 & 2 & 12 \\ 5 & 2 & 6 \\ -9 & -2 & -10 \end{pmatrix} \\ &\overset{Z^{12}}{=} \ker\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 11 & 2 & 12 \\ -9 & -2 & -10 \end{pmatrix} \overset{Z^{21}(-\frac{11}{5})\circ Z^{31}(\frac{9}{5})}{=} \ker\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ &\overset{Z^{2}(-\frac{5}{6})\circ Z^{32}(\frac{2}{3})}{=} \ker\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) A ist diagonalisierbar, weil A drei verschiedene Eigenwerte hat (vgl. Korollar 7.24). Eine Basis aus Eigenvektoren ist z.B.

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d)

$$T = (v_1\, v_2\, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e) Bestimmung von T^{-1} mit Hilfe von elementaren Zeilentransformationen:

$$\begin{aligned}
(T|\mathbb{I}_3) \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{Z^{21}(-1)\circ Z^{31}(1)}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{Z^{32}(3)\circ Z^{23}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \\
&\overset{Z^{13}(2)\circ Z^{12}(-6)}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \\
&\overset{Z^{1}(-1)\circ Z^{2}(-1)}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) = (\mathbb{I}_3|T^{-1})
\end{aligned}$$

Also

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrixmultiplikation ergibt

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}(n, n; \mathbb{C}).$$

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(t) &= \det(t\mathbb{I}_n - A) = \det \begin{pmatrix} t & & & -1 \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & t \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{t \det \begin{pmatrix} t & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & t \end{pmatrix}}_{t^{n-1}} \underbrace{+(-1)^n \det \begin{pmatrix} -1 & t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{(-1)^{n-1}}, \\
&= t^n - 1\,.
\end{aligned}$$

wobei die ursprüngliche Determinante nach der 1. Zeile entwickelt wurde. Bei der Berechnung der beiden Determinanten in der zweiten Zeile wurde verwendet, dass die entsprechenden $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen untere, bzw. obere Dreiecksmatrizen sind.

(b) Für alle $\xi^j = e^{\frac{2\pi i j}{n}}$ gilt $(\xi^j)^n = e^{2\pi i j} = 1$. Daher sind alle ξ^j Nullstellen von $\chi_A(t)$. Ferner sind die ξ^j für $0 \leq j < n$ paarweise verschieden, denn aus $\xi^j = \xi^k$ folgt $\xi^{j-k} = e^{\frac{2\pi i(j-k)}{n}} = 1$, und daher $j - k \in n\mathbb{Z}$. Für jede Nullstelle eines Polynoms teilt aber der entsprechende Linearfaktor das Polynom. Da der Grad von $\chi_A = n$ gerade der Anzahl der Nullstellen entspricht, muss gelten $\chi_A(t) = a \prod_{i=0}^{n-1}(t - \xi^j)$ mit $a \in \mathbb{C}$. Dass $a = 1$ ist sieht man durch Vergleich des t^n-Terms auf beiden Seiten.

(c) A hat n verschiedene Eigenwerte, und ist daher nach Korollar 7.24. diagonalisierbar.

(d) Um die diagonalisierende Matrix zu bestimmen, berechne Eigenvektoren. Für Eigenvektoren $x \in \mathrm{Mat}(n, 1; \mathbb{C})$ zum Eigenwert ξ^j gilt $A \cdot x = \xi^j\, x$. Ausgeschrieben erhält man

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \xi^j \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Man erhält also $x_2 = \xi^{-j} x_1$, $x_3 = \xi^{-j} x_2 = \xi^{-2j} x_1$, usw. bis $x_n = \xi^{-j} x_{n-1} = \ldots = \xi^{-(n-1)j} x_1$. (Die erste Zeile in der Matrixgleichung wird dann $x_1 = \xi^{-nj} x_1 = x_1$.) Die Vektoren

$$v_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{-j} \\ \xi^{-2j} \\ \vdots \\ \xi^{-(n-1)j} \end{pmatrix}$$

sind also Eigenvektoren von A zum Eigenwert ξ^j. Daher ist

$$T = (v_0\, v_1\, \cdots\, v_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \xi^{-1} & \xi^{-2} & \dots & \xi^{-(n-1)} \\ 1 & \xi^{-2} & \xi^{-4} & \dots & \xi^{-2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi^{-(n-1)} & \xi^{-2(n-1)} & \dots & \xi^{-(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine diagonalisierende Matrix für A.

Aufgabe 4 Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Prüfung ob diese beiden Matrizen diagonalisierbar sind, verwende Satz 7.25. Zunächst stellt man leicht fest, dass die charakteristischen Polynome von A und B übereinstimmen:

$$\chi_A(t) = (t-1)(t-2)^2 = \chi_B(t).$$

Beide haben also die Eigenwerte 1 und 2. Als nächstes berechne ich die Dimensionen der jeweiligen Eigenräume:

$$\dim(V_1(A)) = \dim \text{Lös}(A - \mathbb{I}_3, 0) = 3 - \text{Rang}(A - \mathbb{I}_3) = 3 - \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\dim(V_1(B)) = \dim \text{Lös}(B - \mathbb{I}_3, 0) = 3 - \text{Rang}(B - \mathbb{I}_3) = 3 - \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\dim(V_2(A)) = \dim \text{Lös}(A - 2\mathbb{I}_3, 0) = 3 - \text{Rang}(A - 2\mathbb{I}_3) = 3 - \text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\dim(V_2(B)) = \dim \text{Lös}(B - 2\mathbb{I}_3, 0) = 3 - \text{Rang}(B - 2\mathbb{I}_3) = 3 - \text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Für die Matrix B entsprechen die Multiplizitäten der Nullstellen des charakteristischen Polynoms also gerade den Dimensionen der entsprechenden Eigenräume:

$$\mu_1(\chi_B) = 1 = \dim(V_1(B)), \quad \mu_2(\chi_B) = 2 = \dim(V_2(b)).$$

B ist nach Satz 7.25. also diagonalisierbar. Für die Matrix A hingegen gilt:

$$\mu_1(\chi_A) = 1 = \dim(V_1(A)), \text{ aber } \mu_2(\chi_A) = 2 \neq 1 = \dim(V_2(A)).$$

A ist also nicht diagonalisierbar.